

Un determinado proceso industrial se modeliza según un proceso de Markov en tiempo continuo con cuatro estados, 1, 2, 3 y 4, definido según la siguiente matriz de tasa de transiciones instantáneas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tasas vienen expresadas en sucesos por minuto.

- a) Determinar el tiempo medio de permanencia en cada uno de los estados y la matriz de probabilidades de transición.*
- b) ¿Se puede considerar este modelo como un proceso de Nacimiento y Muerte? Justificar la respuesta.*
- c) Si por cada hora que el sistema se encuentra en el estado 4 se tiene una penalización de 36 euros, determinar la penalización diaria esperada, supuesto un periodo de operación diario de 8 horas.*

v_i : tasa de permanencia en el estado i ,
 q_{ij} : tasa de transición instantánea, y
 p_{ij} : probabilidad de ir del estado i al estado j ,

sabemos que

$$q_{ij} = v_i p_{ij}.$$

Como $\sum_j p_{ij} = 1$ al ser una distribución de probabilidad, tenemos que

$$v_i = v_i \sum_j p_{ij} = \sum_j v_i p_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

y despejando p_{ij} de (7.3), obtenemos

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

donde la segunda igualdad se ha obtenido aplicando el resultado de (6.2).

a) El tiempo medio de permanencia en el estado i , $i = 1, \dots, 4$, es la inversa de la tasa de permanencia en el estado i , ya que el tiempo de permanencia en el estado i sigue una distribución exponencial de tasa v_i . Por lo tanto, los tiempos medios de permanencia en los estados 1, 2, 3 y 4 son $1/v_1$, $1/v_2$, $1/v_3$ y $1/v_4$, respectivamente. Es decir,

El tiempo de permanencia en el estado 1 es $1/v_1 = 1/1 = 1$ minuto.

El tiempo de permanencia en el estado 2 es $1/v_2 = 1/1.5 = 0.\hat{6}$ minutos.

El tiempo de permanencia en el estado 3 es $1/v_3 = 1/1.5 = 0.\hat{6}$ minutos.

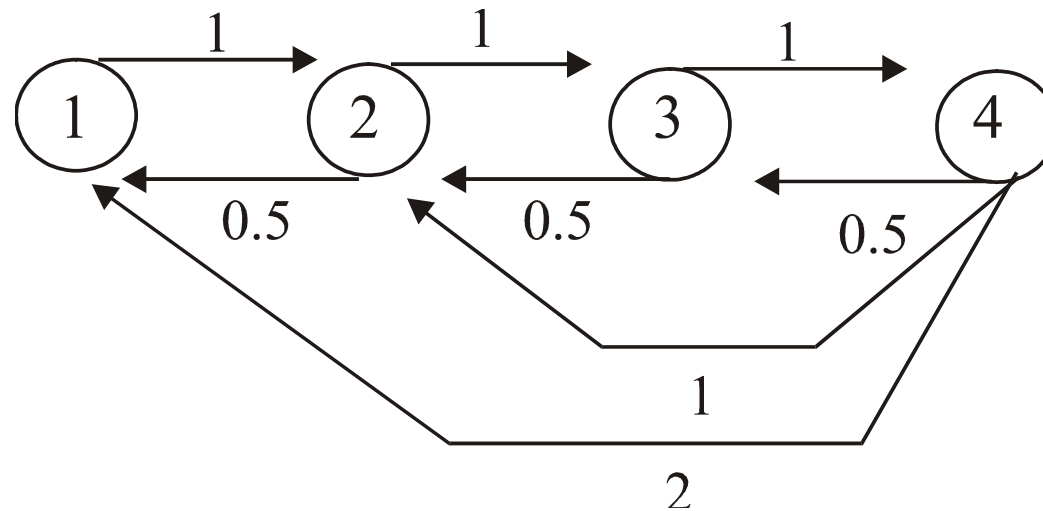
El tiempo de permanencia en el estado 4 es $1/v_4 = 1/3.5 = 0.286$ minutos.

La matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/1 & 0 & 0 \\ 0.5/1.5 & 0 & 1/1.5 & 0 \\ 0 & 0.5/1.5 & 0 & 1/1.5 \\ 2/3.5 & 1/3.5 & 0.5/3.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 4/7 & 2/7 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

b) El diagrama de transición es



No se puede considerar este modelo como un *proceso de nacimiento y muerte* ya que en un proceso de este tipo sólo se pueden producir transiciones al estado inmediatamente anterior o posterior, mientras que en el caso que nos ocupa, desde el estado 4 se producen transiciones al resto de estados.

c) El porcentaje de permanencia en el estado 4, viene determinado por π_4 . Así, la penalización media será $8 \times 36\pi_4 = 8 \times 36 \times 0.0734 = 21.139$ euros.

Un ascensor presta servicio a un edificio de tres plantas (planta baja, primera y segunda). Los usuarios llegan a cada una de las plantas siguiendo distribuciones exponenciales con las medias que se presentan en la siguiente tabla

Planta	Media
Baja	5 minutos
1ª	7 minutos
2ª	9 minutos

La siguiente matriz muestra la probabilidad con que un usuario que coge el ascensor en una planta, se traslada a otra.

$$\begin{matrix} & \text{B} \\ \begin{matrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cuando un usuario llega al ascensor, si éste no está en su planta debe llamarlo antes de utilizarlo. El tiempo que tarda el ascensor en hacer el recorrido (independientemente de si va cargado o vacío o el número de plantas recorridas) es exponencial de media 10 segundos.

- Modelizar el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo.*
- Plantear sus ecuaciones de equilibrio.*
- Indicar el porcentaje de tiempo que el ascensor está parado (no calcular).*

a) Para modelizar el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo consideremos los siguientes estados:

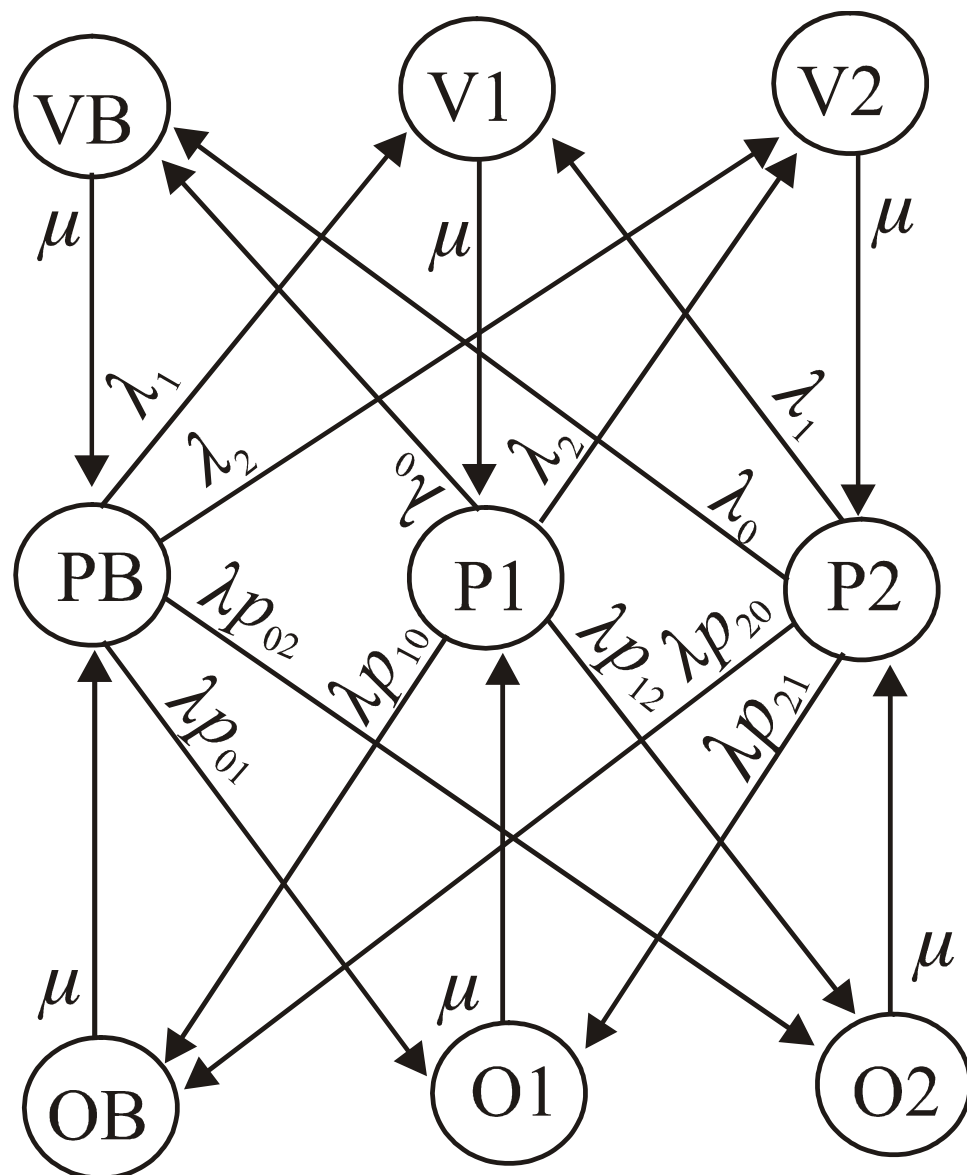
PB : el ascensor está parado en la planta B,
P1 : el ascensor está parado en la planta 1,
P2 : el ascensor está parado en la planta 2,
OB : el ascensor va ocupado a la planta B,
O1 : el ascensor va ocupado a la planta 1,
O2 : el ascensor va ocupado a la planta 2,
VB : el ascensor va vacío a la planta B,
V1 : el ascensor va vacío a la planta 1,
V2 : el ascensor va vacío a la planta 2.

Las tasas de llegada de los usuarios a cada planta siguen exponenciales de parámetro:
 $\lambda_0 = \frac{1}{5 \times 60} = \frac{1}{300}$ usuarios/seg (para la planta baja), $\lambda_1 = \frac{1}{7 \times 60} = \frac{1}{420}$ usuarios/seg.
(para la planta 1ª) y $\lambda_2 = \frac{1}{9 \times 60} = \frac{1}{540}$ usuarios/seg. (para la planta 2ª).

El tiempo que tarda el ascensor en hacer un trayecto sigue una exponencial de parámetro:

$$\mu = \frac{1}{10}.$$

Así, las transiciones entre estados seguirán las siguientes tasas: $\lambda_i p_{ij}$ (si la transición es entre el estado P_i y el O_j) y λ_j (si la transición es entre el estado P_i y el V_j).



$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Las ecuaciones de equilibrio son

$$\frac{1}{10}\pi_{VB} = \frac{1}{300}\pi_{P1} + \frac{1}{300}\pi_{P2}$$

$$\frac{1}{10}\pi_{V1} = \frac{1}{420}\pi_{PB} + \frac{1}{420}\pi_{P2}$$

$$\frac{1}{10}\pi_{V2} = \frac{1}{540}\pi_{PB} + \frac{1}{540}\pi_{P1}$$

$$\left(\frac{1}{420} + \frac{1}{540} + \frac{0.6}{300} + \frac{0.4}{300}\right)\pi_{PB} = \frac{1}{10}\pi_{VB} + \frac{1}{10}\pi_{OB}$$

$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{540} + \frac{0.8}{420} + \frac{0.2}{420}\right)\pi_{P1} = \frac{1}{10}\pi_{V1} + \frac{1}{10}\pi_{O1}$$

$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{420} + \frac{0.3}{540} + \frac{0.7}{540}\right)\pi_{P2} = \frac{1}{10}\pi_{V2} + \frac{1}{10}\pi_{O2}$$

$$\frac{1}{10}\pi_{OB} = \frac{0.8}{420}\pi_{P1} + \frac{0.3}{540}\pi_{P2}$$

$$\frac{1}{10}\pi_{O1} = \frac{0.6}{300}\pi_{PB} + \frac{0.7}{540}\pi_{P2}$$

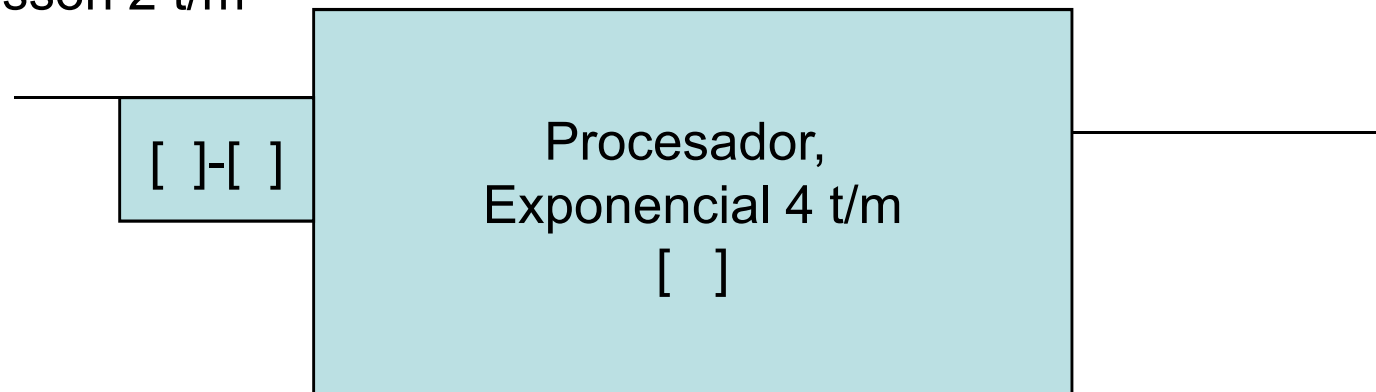
$$\frac{1}{10}\pi_{O2} = \frac{0.4}{300}\pi_{PB} + \frac{0.2}{300}\pi_{P1}$$

$$\pi_{VB} + \pi_{V1} + \pi_{V2} + \pi_{PB} + \pi_{P1} + \pi_{P2} + \pi_{OB} + \pi_{O1} + \pi_{O2} = 1$$

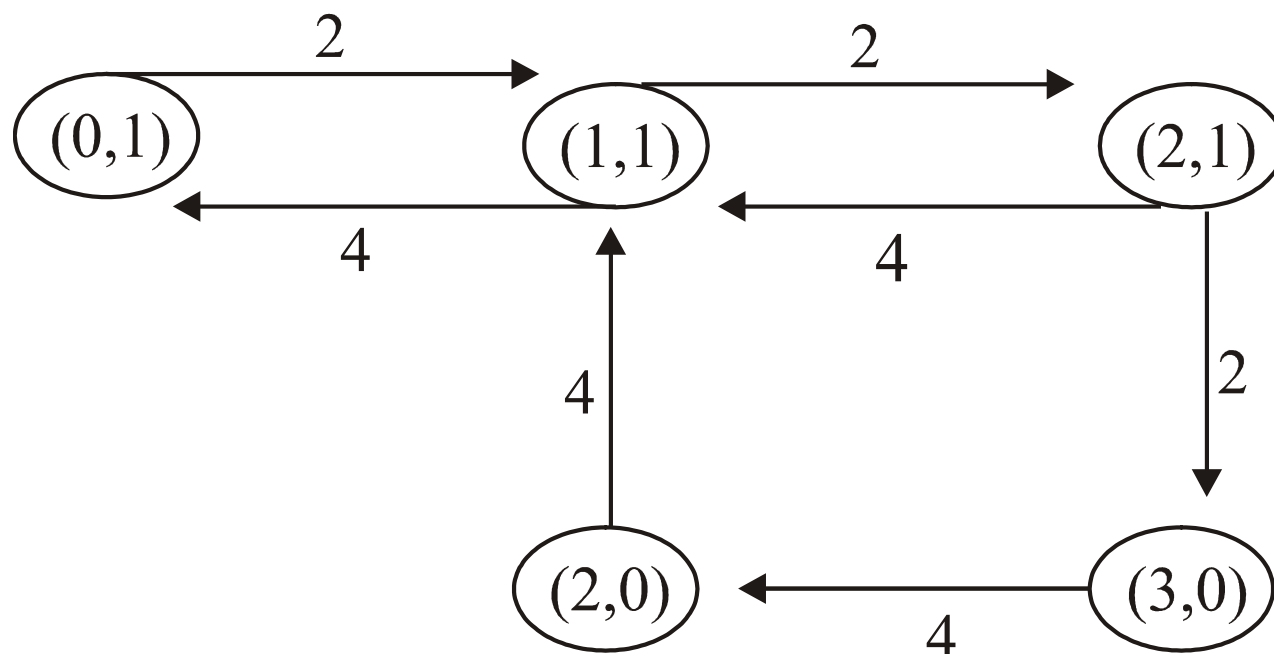
c) El porcentaje de tiempo que el ascensor está parado es $\pi_{PB} + \pi_{P1} + \pi_{P2}$.

A un procesador le llegan trabajos según un proceso de Poisson de tasa 2 trabajos por minuto. El procesador los procesa en un tiempo exponencial de tasa 4 trabajos por minuto. Sin embargo, cuando hay 3 trabajos en el sistema éste se bloquea y no permite la entrada de trabajos hasta que no haya ningún trabajo en la cola. En ese momento, es decir, cuando en el sistema tan sólo se encuentra el trabajo que está en el procesador, es cuando el sistema se desbloquea y vuelve a permitir la entrada de trabajos. ¿Cuál es la proporción de mensajes bloqueados a largo plazo?

Poisson 2 t/m



Solución: Cada estado lo representaremos por los valores (X_t, Y_t) donde X_t representa el número de trabajos que hay en el instante t , $X_t = 0, 1, 2, 3$, e Y_t representa el estado del sistema, valiendo 0 cuando el sistema está bloqueado y 1 cuando no lo está. Así el diagrama de transición es



Nos piden la proporción de mensajes bloqueados a largo plazo, es decir, $\pi_{2,0} + \pi_{3,0}$. Para calcular este valor es necesario calcular la distribución estacionaria, que se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio siguiente

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi_{0,1} = 4\pi_{1,1} \\ (4+2)\pi_{1,1} = 2\pi_{0,1} + 4\pi_{2,1} + 4\pi_{2,0} \\ (4+2)\pi_{2,1} = 2\pi_{1,1} \\ 4\pi_{3,0} = 2\pi_{2,1} \\ 4\pi_{2,0} = 4\pi_{3,0} \\ \pi_{0,1} + \pi_{1,1} + \pi_{2,1} + \pi_{3,0} + \pi_{2,0} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_{1,1} = \frac{1}{2}\pi_{0,1} \\ \pi_{2,1} = \frac{1}{6}\pi_{0,1} \\ \pi_{3,0} = \frac{1}{12}\pi_{0,1} \\ \pi_{2,0} = \frac{1}{12}\pi_{0,1} \\ \pi_{0,1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)^{-1} = \frac{6}{11} \end{array} \right\}$$

Luego la proporción de mensajes bloqueados a largo plazo es

$$\pi_{2,0} + \pi_{3,0} = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{11} \simeq 0.09,$$

o lo que es lo mismo el 9%.

Un técnico de un servicio de reparación de electrodomésticos a domicilio atiende avisos en las localidades de Aranjuez y Ocaña. En cada servicio tarda una media de 2 horas, aunque este tiempo varía siguiendo una distribución exponencial. Una vez acabado de atender un servicio, el operario se desplaza inmediatamente al siguiente domicilio que deba servir. Los servicios se atienden en riguroso orden de llegada a la central y su volumen es tal que siempre hay algún servicio que atender. Los tiempos de desplazamiento de un domicilio a otro también son variables, habiéndose observado que si el desplazamiento es entre dos domicilios de Aranjuez el tiempo medio es de 15 minutos, en Ocaña 10 minutos y si el desplazamiento debe realizarse entre domicilios de distintas localidades es de 30 minutos. Todos estos tiempos puede considerarse que se distribuyen exponencialmente. Estadísticamente se ha comprobado que el volumen de avisos procedentes de Aranjuez es el triple de los procedentes de Ocaña.

Con estos datos:

- a) Modelizar la actividad del técnico como un proceso de Markov.*
- b) Determinar el porcentaje de tiempo que el técnico empleará en desplazamientos.*
- c) Si se supone una dedicación de 160 horas mensuales, ¿cuál será el número medio de servicios que atenderá el técnico en un mes?*
- d) Una vez que acaba un servicio en Aranjuez, ¿qué tiempo medio transcurrirá hasta que termine otro en Ocaña?*

A : Técnico efectuando una reparación en Aranjuez,

AA : Técnico desplazándose entre dos domicilios de Aranjuez,

AO : Técnico desplazándose desde un domicilio de Aranjuez a otro de Ocaña,

O : Técnico efectuando una reparación en Ocaña,

OO : Técnico desplazándose entre dos domicilios de Ocaña,

OA : Técnico desplazándose desde un domicilio de Ocaña a otro de Aranjuez.

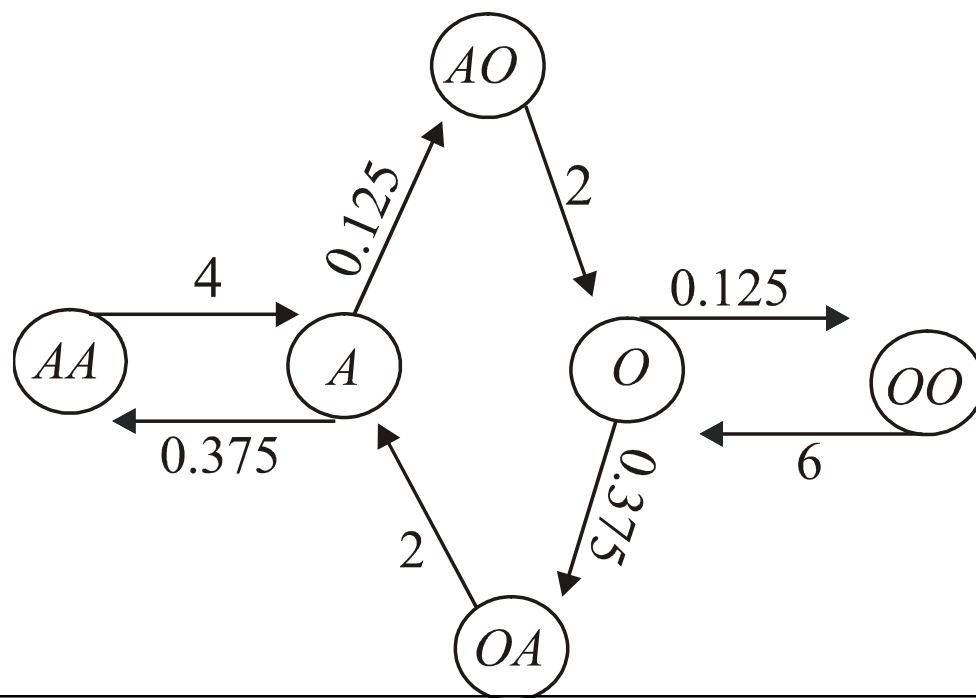
a) Con esta definición, las tasas de permanencia en cada uno de los estados, expresadas en horas, son: 0.5 (para el estado A), 0.5 (para el estado O), 4 (para el estado AA), 6 (para el estado OO), 2 (para el estado AO) y 2 (para el estado OA).

Y la matriz de probabilidades de transición es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} A \quad O \quad AA \quad OO \quad AO \quad OA \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ O \\ AA \\ OO \\ AO \\ OA \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.75 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

El siguiente gráfico muestra el diagrama de transición resultante

$$\left. \begin{aligned}
 4\pi_{AA} &= \frac{3}{8}\pi_A \\
 \frac{1}{2}\pi_A &= 4\pi_{AA} + 2\pi_{OA} \\
 2\pi_{AO} &= \frac{1}{8}\pi_A \\
 2\pi_{OA} &= \frac{3}{8}\pi_O \\
 \frac{1}{2}\pi_O &= 6\pi_{OO} + 2\pi_{AO} \\
 6\pi_{OO} &= \frac{1}{8}\pi_O \\
 \sum_j \pi_j &= 1
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 \pi_{AA} &= \frac{3}{32}\pi_A \\
 \pi_{OA} &= \frac{1}{16}\pi_A \\
 \pi_{AO} &= \frac{1}{16}\pi_A \\
 \pi_O &= \frac{1}{3}\pi_A \\
 \pi_{OO} &= \frac{1}{144}\pi_A \\
 \pi_A &= \left(1 + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{1}{144}\right)^{-1} = \frac{288}{449}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
 \pi_{AA} &= \frac{864}{14368} \simeq 0.06 \\
 \pi_{OA} &= \frac{288}{7184} \simeq 0.04 \\
 \pi_{AO} &= \frac{288}{7184} \simeq 0.04 \\
 \Rightarrow \pi_O &= \frac{288}{1347} \simeq 0.214 \\
 \pi_{OO} &= \frac{288}{64656} \simeq 0.004 \\
 \pi_A &= \frac{288}{449} \simeq 0.641
 \end{aligned}$$

b) Así, el porcentaje de tiempo que el técnico empleará en desplazamiento es

$$\pi_{AA} + \pi_{AO} + \pi_{OA} + \pi_{OO} \simeq 0.06 + 0.04 + 0.04 + 0.004 = 0.144.$$

c) Para estimar el número de servicios calcularemos el tiempo efectivo de trabajo que vendrá dado por

$$(\pi_A + \pi_O) \times 160 \simeq 0.855 \times 160 = 136.8 \text{ horas.}$$

Como cada servicio dura 2 horas se tendrá que el número de servicios será

$$\frac{136.8}{2} = 68.4 \text{ servicios.}$$

d) Para calcular la esperanza del tiempo solicitado (T_{AO}) consideramos el caso en que a la salida del servicio se va directamente a Ocaña ($A \rightarrow O$), y el caso en que se atiende otro servicio en Aranjuez ($A \rightarrow A$).

$$\begin{aligned} E[T_{AO}] &= E[T_{AO} | A \rightarrow O] P(A \rightarrow O) + E[T_{AO} | A \rightarrow A] P(A \rightarrow A) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + 2 + E[T_{AO}]\right) \frac{3}{4} = \\ &= \frac{5}{8} + \frac{27}{16} + \frac{3}{4} E[T_{AO}] \Rightarrow \frac{1}{4} E[T_{AO}] = \frac{37}{16} \Rightarrow E[T_{AO}] = \frac{37}{4} = 9.25 \text{ horas.} \end{aligned}$$

Una máquina precisa para su funcionamiento de 2 componentes de tipo A y 1 de tipo B que están sujetas a fallos. Todas las componentes se averían al cabo de un tiempo de funcionamiento exponencial, de media $1/2$ hora para las componentes de tipo A y media 1 hora para las componentes de tipo B. Reponer una componente requiere un tiempo exponencial, de media $1/12$ de hora si es de tipo A y de media $1/15$ de hora si es de tipo B.

Si el sistema empieza funcionando, determinar:

- a) El tiempo que se espera que esté funcionando en un intervalo de tiempo de 7 horas.
- b) La proporción de piezas de tipo A y B que conviene tener de repuesto para atender a las averías. El gasto medio en averías si se han averiado 27 componentes y las componentes de tipo A y B cuesta 1000 y 1100 euros, respectivamente
- c) Si la avería de la máquina se prolonga por encima de los 6 minutos el fallo se considera severo, ¿cuál es la probabilidad de que cuando se produce un fallo éste sea severo?

Solución: Denotemos con $X(t)$ el estado de la máquina en el instante t y definamos los estados:

0 : máquina funciona,

1 : máquina con una componente A averiada,

2 : máquina con una componente B averiada.

Entonces, el problema puede ser representado como una cadena de Markov en tiempo continuo donde las tasas de permanencia en cada estado son:

$$v_0 = 2 + 2 + 1 = 5, \quad v_1 = 12 \quad \text{y} \quad v_2 = 15,$$

y las probabilidades de transición

$$P_{01} = P(\min\{X_{A_1}, X_{A_2}\} < X_B) = \frac{2+2}{2+2+1} = 4/5,$$

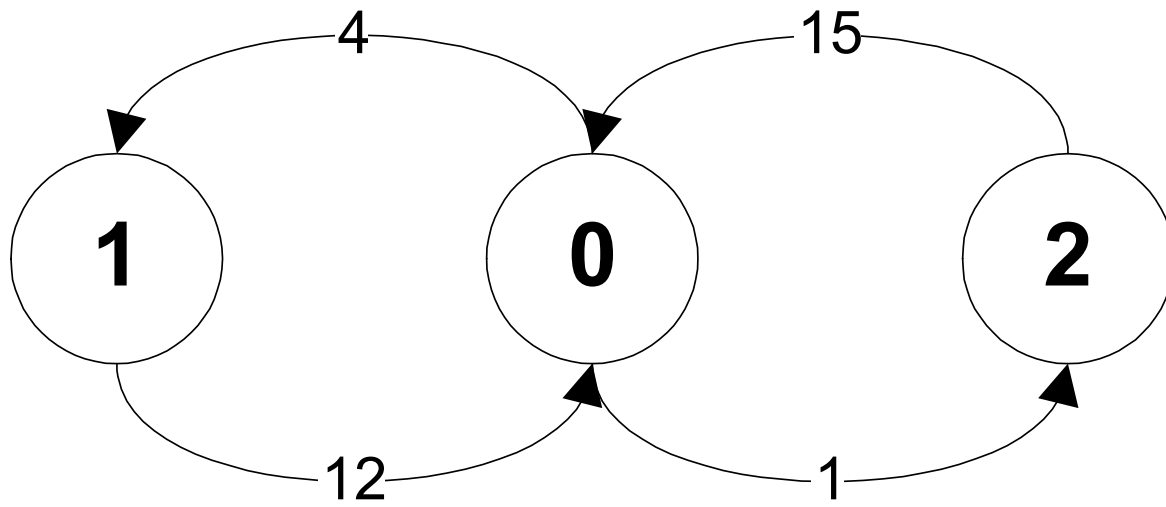
$$P_{02} = P(\min\{X_{A_1}, X_{A_2}\} > X_B) = \frac{1}{2+2+1} = 1/5,$$

$$P_{10} = 1 = P_{20}.$$

donde X_{A_1} y X_{A_2} son los tiempos que tardan en averiarse cada una de las componentes A de la máquina, los cuales siguen una distribución exponencial de tasa $1/2$ y X_B el tiempo que tarda en averiarse la componente B . Por lo tanto, las tasas instantáneas de transición son:

$$q_{01} = v_0 P_{01} = 5 \times 4/5 = 4, \quad q_{10} = v_1 P_{10} = 12 \times 1 = 12,$$

$$q_{02} = v_0 P_{02} = 5 \times 1/5 = 1, \quad q_{20} = v_2 P_{20} = 15 \times 1 = 15.$$



a) Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\left. \begin{array}{l} 5\pi_0 = 12\pi_1 + 15\pi_2 \\ 12\pi_1 = 4\pi_0 \\ 15\pi_2 = \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{4}{12}\pi_0 \\ \pi_2 = \frac{1}{15}\pi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_0 = \frac{1}{1 + 4/12 + 1/15} = \frac{5}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{4}{12}\pi_0 = \frac{5}{21} \\ \pi_2 = \frac{1}{15}\pi_0 = \frac{1}{21} \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, el tiempo que se espera que esté funcionando en un intervalo de tiempo de 7 horas es $7 \times \pi_0 = 7 \times 5/7 = 5$ horas.

b) La proporción de repuestos necesarios vendrá dada por la probabilidad de que cuando se produzca un fallo este sea de cada uno de los tipos previstos.

Así, la proporción de repuestos tipo A , sería $P_{01} = 4/5$ y la de tipo B $P_{02} = 1/5$.

Si se han producido 27 averías y sabemos que la proporción de averías del tipo A son $4/5$ y la proporción de averías del tipo B son $1/5$ tenemos que el gasto medio en las 27 componentes es

$$27 \times 4/5 \times 1000 + 27 \times 1/5 \times 1100 = 27540 \text{ euros.}$$

c) Si denominamos X_A y X_B las variables aleatorias que miden la duración de las reparaciones de cada uno de los tipos de avería, sabemos que siguen distribuciones exponenciales de tasas 12 y 15, respectivamente. Así,

$$P\{X_A > 0.1\} = e^{-12 \times 0.1} = 0.301$$

$$P\{X_b > 0.1\} = e^{-15 \times 0.1} = 0.223$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la distribución de los fallos de cada uno de los tipos de equipo, se tendría que la probabilidad de fallo severo es

$$4/5 \times 0.301 + 1/5 \times 0.223 = 0.286$$

